3.2. Sürekli fonksiyonların Özellikleri

Teorem 3.2.1: $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ ve $a \in X$ noktasında f sürekli olsun. O zaman

1°) $\exists \delta > 0$ için f fonksiyonu $U_\delta(a)$ üzerinde süreklidir.

2°) $f(a) \neq 0$ ise $\forall x \in U_\delta(a)$ için $f(x)$ ile $f(a)$ aynı işaretli o.ş. $\exists \delta > 0$ vardır.

İspat: 2°) f, $x = a$'da sürekli ve $f(a) \neq 0$ olsun. İlk olarak

→ $f(a) > 0$ ise $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$ o.üzere $|x-a| < \delta'$ old.da $|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$ yani $\frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2}$ dir. Bu ise $f(x) > 0$ demektir.

→ $f(a) < 0$ ise $\varepsilon = \frac{-f(a)}{2}$ alınırsa $|x-a| < \delta''$ old.da $|f(x) - f(a)| < -\frac{f(a)}{2} \Rightarrow \frac{3f(a)}{2} < f(x) < \frac{f(a)}{2}$ olup $f(x) < 0$ demektir. Yani $f(a)$ ile $f(x)$ aynı işaretlidir.

Teorem 3.2.2: $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $a \in X$ noktasında sürekli olsunlar. Bu durumda $(f+g)$, $(f-g)$, $(\lambda \cdot f)$ $\lambda \in \mathbb{R}$, $(f \cdot g)$ ve $\left(\frac{f}{g}\right)$, $g(a) \neq 0$ fonksiyonları da sürekli olurlar.

İspat: Limit konusunda yapılan Teorem

Teorem 3.2.3: $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ iki fonksiyon ve f fonksiyonu $a \in X$ noktasında; g fonksiyonuda $f(a)$ noktasında sürekli ise $g \circ f : X \longrightarrow Z$ fonksiyonu $a \in X$ noktasında süreklidir.

İspat: Limit konusunda yapılan Teorem

Süreklilik ile ilgili tanım ve teoremler dikkate alınırsa elementer fonksiyonların kendi tanım kümelerinde sürekli olduğu gösterilir. Yani

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ sabit fonksiyonu süreklidir ($\mathbb{R}$-de)
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ birim fonksiyonu $\mathbb{R}$-de süreklidir.
3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinom fonksiyonu $\mathbb{R}$-de süreklidir.
4) $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x, \cos x$ fonksiyonları $\mathbb{R}$-de süreklidir.
5) $f: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}(2k+1) : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ fonksiyonu tanım kümesinde süreklidir.
   $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cot x$ fonksiyonu tanım kümesinde süreklidir.
6) $a > 0$, $a \neq 1$ için $f(x) = a^x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$-de süreklidir

7) $a>0$, $a\neq 1$ için $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde süreklidir.

8) $f:[-1,1]\to[-\pi/2,\pi/2]$, $g:[-1,1]\to[0,\pi]$ $f(x)=\arcsin x$ ve $g(x)=\arccos x$ fonksiyonları $\forall x\in[-1,1]$ noktasında süreklidir.

9) $f:\mathbb{R}\to(-\pi/2,\pi/2)$ ve $g:\mathbb{R}\to(0,\pi)$ olmak üzere $f(x)=\arctan x$ $g(x)=\operatorname{arccot} x$ fonksiyonları $\mathbb{R}$-de süreklidir.

10)
$$\left.\begin{array}{l}
f:\mathbb{R}\to[1,\infty),\ f(x)=\cosh x\\
g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\sinh x\\
h:\mathbb{R}\to(-1,1),\ h(x)=\tanh x\\
s:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus[-1,1],\ s(x)=\coth x
\end{array}\right\}\ \text{fonksiyonları da kendi tanım kümelerinde süreklidir.}$$

Teorem 3.2.4: (Bolzano–Cauchy) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli ve $f(a)\cdot f(b)<0$ (ters işaretli) olsun. O zaman $f(c)=0$ o.ş. $\exists c\in(a,b)$ vardır.

İspat: Teoremin ispatını Aralığı Yarıya Bölme Yöntemiyle yapacağız. Kabul edelim ki $f(a) < 0$ ve $f(b) > 0$ dır.(Benzer ispat $f(a) > 0$ ve $f(b) < 0$

alınarak da yapılabilir.) $\Delta_0 = [a, b]$ aralığının orta noktası $\frac{a+b}{2}$ dir.$f(\frac{a+b}{2}) = 0$ ise $c = \frac{a+b}{2}$ için teorem ispat edilmiş olur. $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$ ise $[a, \frac{a+b}{2}]$ ve $[\frac{a+b}{2}, b]$ aralıklarının en az birinin uç noktalarında f nin değerleri ters işaretlidir,yani $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ ya da $f(\frac{a+b}{2}) < 0$ dır. $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ ise $(f(\frac{a+b}{2}) < 0$ ise) $\Delta_1 = [a, \frac{a+b}{2}] = [a_1, b_1]$ $(\Delta_1 = [\frac{a+b}{2}, b] = [a_1, b_1])$ diyelim. $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$ ise $c = \frac{a_1+b_1}{2}$ için teorem ispat edilmiş olur. Aksi taktirde $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ ve $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ aralıklarının en az birinin uç noktalarında f nin değerleri ters işaretlidir,yani $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0$ ya da$f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0$ dır. Birinci durumda $\Delta_2 = [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}] = [a_2, b_2]$, ikinci durumda ise $\Delta_2 = [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1] = [a_2, b_2]$ diyelim.Bu yönteme ardarda devam edersek aşağıdaki özelliklere sahip $\Delta_n = [a_2, b_2], n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ kapalı aralıklar dizisi elde ederiz.

(a) $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \cdots \Delta_n \supset \cdots, \Delta_0 = [a, b]$,

(b) Δ_n nin uzunluğu $\mid \Delta_n \mid = \frac{b-a}{2^n}$ dir,

(c) $f(a_n) < 0$ ve $f(b_n) > 0$ dır.

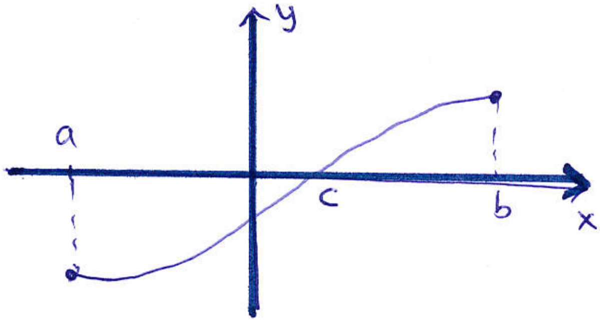
İçiçe aralıklar prensibi gereğince $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \Delta_n \neq \emptyset$ dur. Öte yandan, $\lim\limits_{n \to \infty} \mid \Delta_n \mid = (b-a) \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ olduğuna göre, Cantor Prensibi gereğince $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \Delta_n$ kesişimi yalnızca bir noktadan oluşur. Bu noktaya c diyelim. (Δ_n), $n \in \mathbb{N} \bigcup 0$ dizisinin özellikleri gereğince

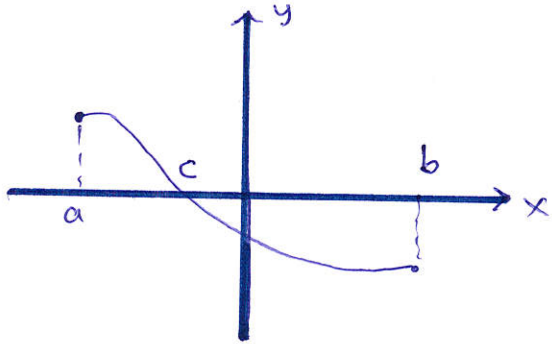
$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots,$$

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots$$

ve $\forall n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ için $a_n \leq c \leq b_n$ olacaktır. Buradan, (a_n) dizisinin monoton artan ve üstten sınırlı,(b_n) dizisinin monoton azalan ve alttan sınırlı olduğu anlaşılır. O zaman, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ limitleri vardır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$ ve üstelik $\beta - \alpha \leq b_n - a_n = \mid \Delta_n \mid$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \mid \Delta_n \mid = 0$ olduğuna göre, $\beta = \alpha$ bulunur.$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $a_n \leq c \leq b_n$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ olduğu için $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ olduğu elde edilir. f fonksiyonu c $(c \in [a_0, b_0] = [a, b])$ noktasında sürekli olduğu için $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$

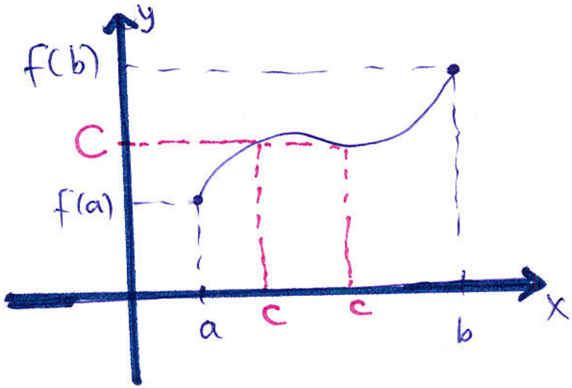
dir.$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $f(a_n) < 0$ olduğundan, $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ ve $f(b_n) > 0$ olduğundan, $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$ olur. Demek ki, $f(c) = 0$ dır. Böylece teorem ispat edilmiş olur. $\square$





Teorem 3.2.5 (Ara Değer Teoremi) : *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli, $f(a) = A$, $f(b) = B$ ve $A \neq B$ olsun. Bu durumda, A ile B arasındaki her C sayısı (yani her $\min(A,B) < C < \max(A,B)$ sayısı) için $f(c) = C$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.*

İspat: $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) - C$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $A < B$ olsun ($B < A$ durumunda ispat benzer şekilde yapılır). φ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0, \varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$ olduğuna göre, Teorem 3.2.4 gereğince $\varphi(c) = 0$, yani $f(c) = C$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır. Böylece teorem ispat edilmiş olur. □



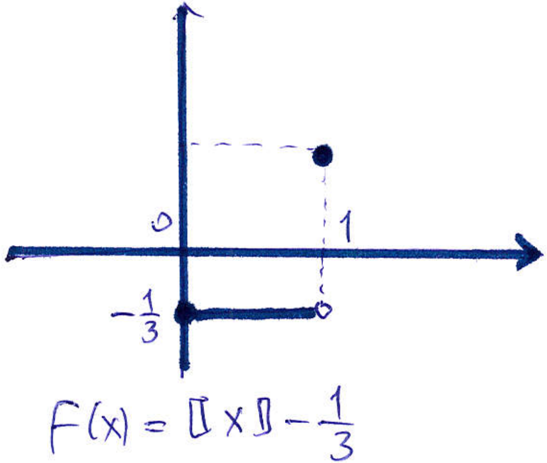
Not: Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.2.5 in hipotezindeki şartların kaldırılamayacağını gösteren bazı örnekler verelim.

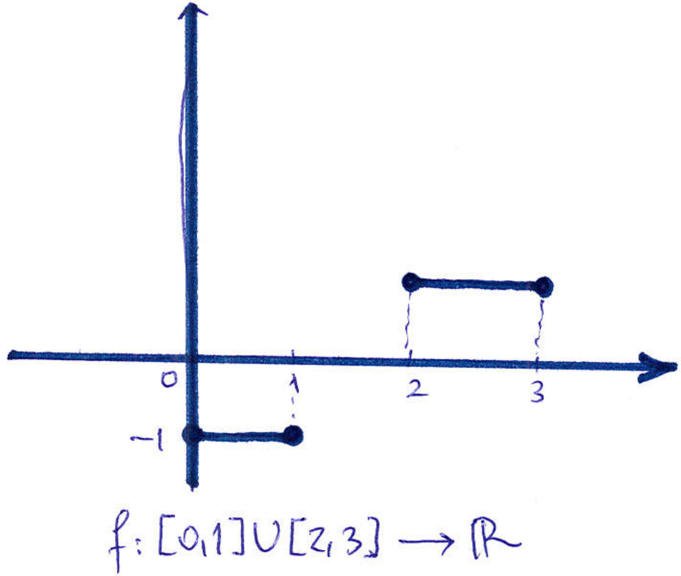
(a) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![x]\!] - \frac{1}{3}$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında süreksizdir. $f(0) = -\frac{1}{3} < 0$ ve $f(1) = \frac{2}{3} > 0$ olmasına rağmen $f(c) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $c \in (a,b)$ noktası yoktur.

(b) $f : [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0,1] \text{ ise;} \\ 1, & x \in [2,3] \text{ ise.} \end{cases}$$

fonksiyonu $D = [0,1] \cup [2,3]$ kümesi üzerinde sürekli, $f(0) = -1 < 0$ ve $f(3) = 1 > 0$ olmasına rağmen $f(c) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $c \in (0,1] \cup [2,3)$ noktası yoktur.





Teorem 3.2.6 (Weierstrass) : *Kapalı ve sınırlı aralık üzerinde sürekli her fonksiyon bu aralık üzerinde sınırlıdır.*

Yani $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu sürekli ise* $\forall x \in [a,b]$ *için* $K \leq f(x) \leq L$ *olacak şekilde* $K, L \in \mathbb{R}$ *vardır.*

İspat: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olsun. $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ kümesinin sınırlı olduğunu gösterelim. Sürekli fonksiyonların Teorem 3.2.1 deki lokal özelliğine göre $\forall x \in [a, b]$ için $\exists \delta = \delta(x) > 0$ öyleki f fonksiyonu $U_\delta(x) \cap [a, b]$ açık aralığında sınırlıdır. $\mathcal{A} = \{U_\delta(x) \cap [a, b] : x \in [a, b]\}$ açık aralıklar ailesini gözönüne alalım. $[a, b]$ aralığı $\mathbb{R}$ nin kapalı ve sınırlı bir alt kümesi olduğuna göre Heyne-Borel Prensibi gereğince $\mathcal{A}$ ailesinin $[a, b]$ yi örten sonlu $\mathcal{A}_0 = \{U_\delta(x_1), U_\delta(x_2), \cdots, U_\delta(x_n)\}$ alt ailesi vardır.f fonksiyonu $U_\delta(x_i) \cap [a, b]$ de sınırlı olduğundan, $\forall x \in U_\delta(x_i) \cap [a, b]$ için $m_i \leq f(x) \leq M_i$ olacak şekilde $m_i, M_i \in \mathbb{R}$ sayıları varolacaktır. Buna göre, $\forall x \in [a, b]$ için

$$\min\{m_1, \cdots, m_n\} \leq f(x) \leq \max\{M_1, \cdots, M_n\}$$

olduğu elde edilir.Bu da f nin sınırlı olması demektir. $\square$

Teorem 3.2.7 (Weierstrass) : *Kapalı ve sınırlı aralık üzerinde sürekli her fonksiyon bu aralıkta en küçük ve büyük değerine ulaşır.*

İspat: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda, f nin $[a,b]$ üzerinde en küçük ve büyük değerlerine ulştığını,yani

$$m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} = f(\alpha)$$

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} = f(\beta)$$

olacak şekilde $\alpha, \beta \in [a,b]$ noktalarının varlığını gösterelim. Bunu M için yapalım (m için ispat benzer şekilde yapılabilir). Teorem 3.2.6 gereğince f, $[a,b]$ üzerinde üstten sınırlıdır. O halde, sup özelliğine göre $\sup\{f(x) : x \in [a,b]\} = M \in \mathbb{R}$ dir. Buna göre, supremumun karakteristik özelliklerinden dolayı $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

olacak şekilde bir $x_n \in [a,b]$ noktası varolacaktır.$\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in [a,b]$ olduğuna göre (x_n) dizisi sınırlı olup Bolzano-Weierstrass Prensibinden dolayı, yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisine sahiptir. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \beta$ diyelim.$[a,b]$ kapalı ve

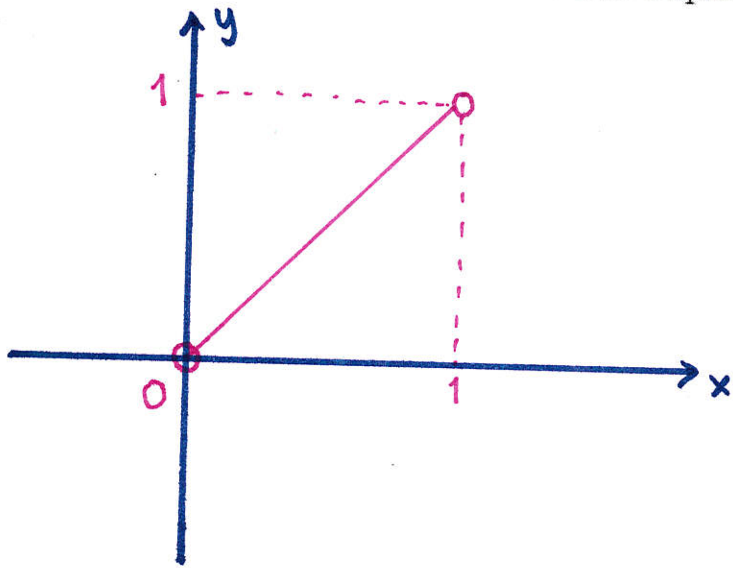
$\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_{n_k} \in [a,b]$ olduğundan $\beta \in [a,b]$ dir. O halde, f, $\beta \in [a,b]$ noktasında sürekli olduğuna göre, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\beta)$ olur. Öte yandan, $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M$$

eşitsizliğinden $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$ olduğu açıktır. Yakınsak $(f(x_{n_k}))$ dizisinin limiti tek olduğundan dolayı $M = f(\beta)$ dır. Böylece teorem ispat edilmiş olur. □

Şimdi Teorem 3.2.6 ve 3.2.7 hipotezindeki şartların kaldırılamayacağını gösteren bazı örnekler verelim.

(a) $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığında süreklidir, fakat $(0,1)$ üzerinde $M = \sup\{x : x \in (0,1)\} = 1$ ve $m = \inf\{x : x \in (0,1)\} = 0$ değerlerine ulaşamaz, çünkü $\forall x \in (0,1)$ için $0 < f(x) < 1$ dir. Bunun sebebi tanım kümesinin kapalı bir aralık olmayışıdır



(b) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

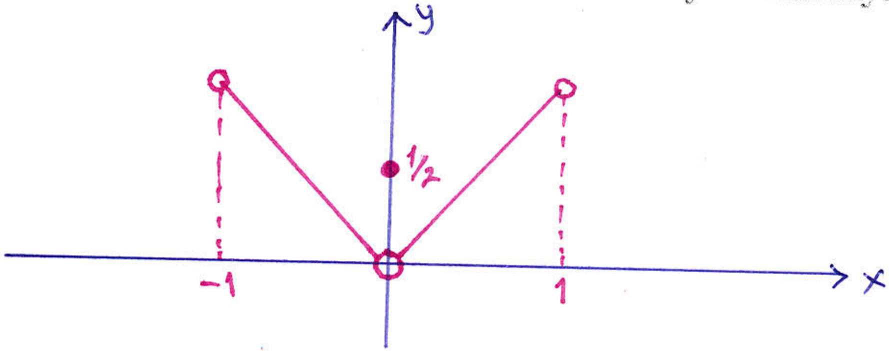
$$f(x) = \begin{cases} |\, x \,|, & x \in (-1, 0) \bigcup (0, 1) \text{ ise;} \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \text{ veya } x = \pm 1 \text{ ise.} \end{cases}$$

fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığında sürekli değildir.

$$m = \inf\{|\, x \,| : x \in [-1, 1]\} = 0,$$

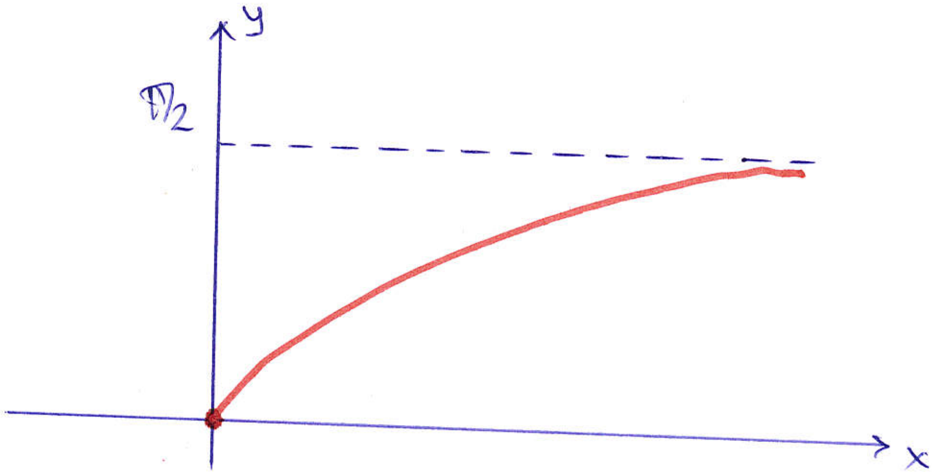
$$M = \sup\{|\, x \,| : x \in [-1, 1]\} = 1$$

olup $\forall x \in [-1, 1]$ için $f(x) \neq 0$ ve $f(x) \neq 1$ dir. Dolayısıyla, fonksiyon $[-1, 1]$ aralığında en küçük ve en büyük değerlerine ulaşamaz. Bunun sebebi f nin sürekli bir fonksiyon olamayışıdır



(c) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x$ fonksiyonu $[0, +\infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyon olduğu halde bu aralıkta en büyük değere sahip değildir, çünkü $\forall x \in [0, +\infty)$ için

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} = \sup\{\arctan x : x \in [0, +\infty)\}$$



Önerme 3.2.8 : *Sürekli bir $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun birebir olması için gerek ve yeter koşul onun $[a, b]$ üzerinde kesin monoton, yani kesin artan veya kesin azalan olmasıdır.*

İspat: f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde kesin monoton ise, onun $[a, b]$ üzerinde birebir olması açıktır, çünkü $x_1, x_2 \in [a, b]$ için $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ olur. Şimdi $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli birebir olması durumunda onun $[a, b]$ üzerinde kesin monoton (kesin artan veya kesin azalan) olduğunu gösterelim. Bunun doğru olmadığını varsayalım. O halde, $[a, b]$ aralığında $f(x_2)$ sayısı $f(x_1)$ ve $f(x_3)$ sayıları arasında olmayacak şekilde $x_1 < x_2 < x_3$ noktaları vardır. Bu durumda, ya $f(x_3)$ sayısı $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ sayıları arasında ya da $f(x_1)$ sayısı $f(x_2)$ ve $f(x_3)$ sayıları arasında bulunmaktadır. Kolaylık için, son durumun gerçeklendiğini varsayalım. f fonksiyonu $[x_2, x_3]$ aralığında sürekli olduğuna göre, Ara Değer Teoreminden $f(x_1{}') = f(x_1)$ olacak şekilde $x_1{}' \in [x_2, x_3]$ noktası vardır. O halde, $x_1 < x_1{}'$ ve $f(x_1) = f(x_1{}')$ olur. Bu da f nin birebir olması ile çelişir. $f(x_3)$ sayısının $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ sayıları arasında olduğu durum benzer şekilde incelenebilir. □

Önerme 3.2.9 : *$X \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde artan (azalan) bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $Y = f(X)$ kümesi üzerinde artan (azalan) $f^{-1} : Y \to \mathbb{R}$ tersi vardır.*

Bu kesimin sonunda düzgün süreklilik gibi özel bir süreklilik kavramı üzerinde duracağız. Bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in X$ noktasında sürekli olması tanımına göre, verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bulunan $\delta > 0$ sayısı genel olarak hem ε sayısına hem de a noktasına bağlıdır
Eğer, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $a \in X$ noktasında sürekli ve verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bulunan $\delta > 0$

sayısı a noktasından bağımsız olup yalnızca ε na bağlı ise, f fonksiyonu X üzerinde düzgün süreklilik özelliğine sahiptir diyeceğiz.

Tanım 3.2.10 : *$X \subset \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı ve $\forall x_1, x_2 \in X$ noktaları için*

$$| x_1 - x_2 | < \delta \Longrightarrow | f(x_1) - f(x_2) | < \varepsilon$$

olacak şekilde yalnızca ε na bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı varsa, f fonksiyonu X üzerinde düzgün süreklidir denir.

Bu tanım ve onun değili kısaca aşağıdaki şekilde söylenebilir. "$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde düzgün süreklidir" $\Longleftrightarrow$"$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ öyleki $\forall x_1, x_2 \in X$ için

$$| x_1 - x_2 | < \delta \Longrightarrow | f(x_1) - f(x_2) | < \varepsilon$$

dir.

"$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde düzgün sürekli değildir" $\Longleftrightarrow$"$\exists\varepsilon > 0$ öyleki $\forall\delta > 0$ için $\exists x_1, x_2 \in X$ öyleki

$$| x_1 - x_2 |< \delta \Longrightarrow | f(x_1) - f(x_2) |\geq \varepsilon$$

dir.

Eğer, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde düzgün sürekli ise süreklidir. Gerçekten, Tanım 3.2.10da $x_1 = x$ ve $x_2 = a$ alınırsa, Tanım 3.1.1 elde edilir. Sürekli bir fonksiyon düzgün sürekli olmayabilir. Az sonra bunu doğrulayan örnekler vereceğiz.

Örnek 3.2.11 :

(a) $f : (0,1) \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{1}{x}$ *fonksiyonu* $(0,1)$ *üzerinde sürekli, fakat düzgün sürekli değildir. Gerçekten,* $\varepsilon = \frac{1}{2}$ *ve* $\forall \delta > 0$ *sayısı için* $n_0 \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}} + 1$ *bir tamsayı olmak üzere* $(0,1)$ *aralığının* $x_1 = \frac{1}{n_0}$ *ve* $x_2 = \frac{1}{n_0+1}$ *noktaları için*

$$| x_1 - x_2 | = \frac{1}{n_0(n_0+1)} < \frac{1}{{n_0}^2} \leq \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{\delta}} + 1)^2} < \delta$$

olmasına rağmen

$$| f(x_1) - f(x_2) | = | \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} | = | n - (n+1) | = 1 > \varepsilon$$

olur. Bu da $f(x) = \frac{1}{x}$ *fonksiyonunun* $(0,1)$ *üzerinde düzgün sürekli olmadığını gösterir.*

(b) $f:(0,1)\to(-\infty,0)$, $f(x)=\ln x$ *fonksiyonu* $(0,1)$ *üzerinde sürekli, fakat düzgün sürekli değildir. Gerçekten,* $\varepsilon=\frac{1}{2}\ln 2$ *ve* $\forall\delta>0$ *sayısı için* $n_0>\frac{1}{2\delta}$ *bir tamsayı olmak üzere* $(0,1)$ *aralığının* $x_1=\frac{1}{n_0}$ *ve* $x_2=\frac{1}{2n_0}$ *noktaları için*

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{1}{n_0}-\frac{1}{2n_0}\right|=\frac{1}{2n_0}<\delta$$

olmasına rağmen

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\ln\frac{1}{n_0}-\ln\frac{1}{2n_0}\right|=|\ln 2|=\ln 2>\varepsilon$$

olur. Bu da $f(x)=\ln x$ *fonksiyonunun* $(0,1)$ *üzerinde düzgün sürekli olmadığını gösterir.*

(c) $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli, fakat düzgün sürekli değildir. Gerçekten, $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ ve $\forall \delta > 0$ sayısı için $n_0 \geq \frac{1}{4\delta^2}$ bir tamsayı olmak üzere $\mathbb{R}$ nin $x_1 = \sqrt{n_0}$ ve $x_2 = \sqrt{n_0 + 1}$ noktaları için

$$\mid x_1 - x_2 \mid = \mid \sqrt{x_0} - \sqrt{n_0 + 1} \mid = \frac{1}{\sqrt{n_0} + \sqrt{n_0 + 1}} < \frac{1}{2\sqrt{n_0}} < \delta$$

olmasına rağmen

$$\mid f(x_1) - f(x_2) \mid = \mid {x_1}^2 - {x_2}^2 \mid = \mid n_0 - (n_0 + 1) \mid = 1 > \varepsilon$$

olur. Bu da $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli olmadığını gösterir.

(d) $f : \mathbb{R} \to [-1,1], f(x) = \sin x$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}$ *üzerinde düzgün süreklidir. Gerçekten,* $\forall \varepsilon > 0$ *için* $\delta = \varepsilon$ *dersek* $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *için*

$$\begin{aligned} | x_1 - x_2 | < \delta \Longrightarrow | f(x_1) - f(x_2) | &= | \sin x_1 - \sin x_2 | \\ &= \left| 2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \\ &= 2 \left| \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \left| \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \\ &\leq 2 \frac{| x_1 - x_2 |}{2} .1 \\ &= | x_1 - x_2 | < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan Tanım 3.2.16 gereğince $f(x) = \sin x$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}$ *üzerinde düzgün süreklidir.*